Dokument nie je kompletný, časom sa ho budem snažiť doplniť, preto si skúste overiť, či na webe nie je novšia verzia. V prípade otázok ma kontaktuje na samuel zavináč fks bodka sk. Tento dokument pozostáva z dvoch častí. V prvej sa vám pokúsim vysvetliť základy z mechaniky, v druhej vám dám nejaké tipy na experimenty.

Teória:

Newtonove pohybové zákony:

V klasickej mechanike sa nepohneme bez Newtonových zákonov. Tie, spolu so znalosťami pôsobiacich síl, v mechanike dávajú kompletný opis deja.

(i) Zákon sily: vektorový súčet všetkých vonkajších síl, ktoré na teleso pôsobia, je úmerný zrýchleniu ťažiska telesa a celkovej hmotnosti. Zapísané rovnicou:
$$F = Ma\,, \tag{1}$$
všimnite si, že zrýchlenie ťažiska *vôbec nezávisí* na tom, na ktorých miestach sily na teleso pôsobia!

(ii) Akcia a reakcia: pôsobenie dvoch telies je vždy vzájomné, telesá na seba pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru. Túto dvojicu k sebe prislúchajúcich síl nazývame akciou a reakciou. Niekoľko príkladov: tlačíme na stenu silou F, stena na nás tlačí silou $-F$, Zem priťahuje kilogramové závažie silou $10\,\mathrm{N}$, aj kilogramové závažie priťahuje Zem silou $10\,\mathrm{N}$.

Už toto málo stačí na to, aby sme si rozanalyzovali niekoľko jednoduchých príkladov.

Príklady:

(i) Hranol položený na stole (vo vákuu pre jednoduchosť), aké naň pôsobia sily? Aké sú reakcie na tieto sily?

(ii) Hranol položený na naklonenej rovine so sklonom α, aké naň pôsobia sily, čo sú reakcie k nim a s akým zrýchlením sa bude hranol pohybovať?

Riešenia:

Skôr, než si prečítate riešenia, pokúste sa ich vymyslieť sami!

Začnime riešením prvého príkladu. Na hranol pôsobí Zem gravitačnou silou $F_g = mg$, reakciou na túto silu je rovnako veľká gravitačná sila, ktorou pôsobí kváder na Zem. Sú to všetky sily, ktoré na kváder pôsobia? Keby to tak bolo, tak súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na kváder je rovný F_g a kváder by sa podľa prvého Newtonovho zákona musel pohybovať nadol so zrýchlením rovným $F_g/m = g$. To sa však nedeje. Kváder stojí na stole, ten mu nedovolí pohybovať sa nadol, zabráni mu v tom silou! Stôl bude na kváder pôsobiť akurát takou veľkou silou, aby súčet všetkých síl na kváder bol nulový![1] Teda stôl bude na

[1] To znie prinajmenšom podivuhodne. Odkiaľ môže hlúpy stôl vedieť, akou silou má pôsobiť? Vysvetlením je, že stôl je stlačiteľný, je ako pružina s obrovskou tuhosťou. Sila, ktorou pôsobí na teleso, je úmerná tomu, ako veľmi je stlačený. Kým stôl nebude pôsobiť dostatočnou silou na to, aby sa sily pôsobiace na kváder vyrovnali, kváder sa bude pohybovať nadol a stláčať až do momentu, kedy bude stôl dostatočne stlačený (prípadne kým sa nezlomí a teleso sa cezeň neprepadne).

kváder pôsobiť silou mg nahor. Niekedy sa *mylne* hovorí, že sa jedná o reakciu na gravitačnú silu. To je ale blud! Tak si ho láskavo ráčte vyhodiť z hláv! Reakciou na gravitačnú silu je opäť len gravitačná sila! Mali by sme ešte dodať, že reakciou na silu od stola je sila, ktorou kváder tlačí na stôl a tá je opäť rovná mg. Tá ma rovnakú veľkosť aj smer, ako gravitačná sila, ktorá pôsobí na kváder, ale nemožno tvrdiť, že sa jedná o gravitáciu kvádra! Jedná sa o silu, ktorou kváder tlačí na podložku, nič viac, nič menej.

Pokračujeme druhým príkladom:

Na hranol pôsobí gravitačná sila $F_g = mg$, ktorú môžeme rozložiť na zložky $F_x = mg \sin\alpha$ a $F_y = mg\cos\alpha$ ako na obrázku. Reakciou na túto gravitačnú silu je zase len gravitačná sila, ktorou kváder pôsobí na Zem. Súčet všetkých síl v smere y musí byť nulový – kváder nemôže prechádzať cez podložku. Preto musí podložka pôsobiť silou veľkosti $mg\cos\alpha$. Reakciou na túto silu je sila, ktorou pôsobí kváder na podložku. Keď sčítame všetky sily na kváder pôsobiace, zistíme, že sily v ypsilonovom smere sa vyrušili a výslednica je rovná F_x. Kváder sa teda bude pohybovať so zrýchlením $F_x/m = g\sin\alpha$

Trenie:

Trenie je sila, ktorá bráni šúchaniu sa dvoch povrchov po sebe. Rozlišujeme statické trenie ako silu, ktorá bráni tomu, aby sa povrchy po sebe šúchať začali a dynamické trenie, ktoré pôsobí na povrchy, ktoré sa už po sebe šúchajú tak, aby pôsobilo proti tomuto šúchaniu.

Nasledovné vzťahy pre trenie sú empiricky určené a nemusia byť za každých okolností dostatočne presné, môžete ich skúsiť preveriť.

Pre veľkosť dynamického trenia platí

$$F_t = f_\mathrm{d} F_\mathrm{p}\,, \tag{2}$$

kde f_d je koeficient dynamického trenia závislý od povrchov, ktoré sa po sebe trú a F_p je veľkosť prítlačnej sily, ktorou sú povrchy k sebe tlačené.

Pre statické trenie mnohý z vás poznajú analogický vzťah

$$F_t = f_\mathrm{s} F_\mathrm{p}\,, \tag{3}$$

kde f_s je koeficient statického trenia. **Tento vzťah je však nesprávny!** Potom by totiž na kváder pokojne položený na stole musela pôsobiť trecia sila a keďže niet inej sily, ktorá by ju kompenzovala, kváder by sa podla Newtonových zákonov musel začať sám od seba pohybovať. To je však absurdné. Chyba spočíva v tom, že vzťah (3) popisuje maximálnu možnú silu statického trenia, správne teda vzťah pre veľkosť sily statického trenia vyzerá nasledovne

$$F_t \leq f_\mathrm{s} F_\mathrm{p}\,, \tag{4}$$

Spomeňme ešte, že v praxi zvykne platiť

$$f_\mathrm{d} < f_\mathrm{s}$$

Príklady:

(i) Kváder hmotnosti m sa pohybuje po stole rýchlosťou v. Koeficient trenia medzi kvádrom a stolom je f. Akú dráhu kváder prejde, kým sa zastaví?

(ii) Kváder hmotnosti 1 kq stojí na stole a rukou na neho zľava tlačíme silou 3 N. Aké sily pôsobia na kváder?

(iii) Kváder je položený na naklonenej rovine so sklonom α. Aký vzťah musí α spĺňať, aby sa kváder nezačal šmýkať dole, ak koeficient trenia medzi kvádrom a podložkou je f?

(iv) Zakreslite sily pôsobiace na automobil pohybujúci sa diaľnici rovnomerným priamočiarym pohybom. Ktoré sily ho poháňajú vpred a ktoré ho naopak brzdia?

(v) Zakreslite sily, ktoré pôsobia na automobil s vypnutým motorom idúci voľne dole kopcom

Riešenia:

(i) Kváder má kinetickú energiu $\frac{1}{2}mv^2$. Trecia sila, ktorou pôsobí podložka na kváder (a teda aj kváder na podložku), má veľkosť fmg. Pri prejdení dráhy d kváder teda vykoná prácu veľkosti $fmgd$ a to na úkor svojej kinetickej energie. Teda

$$fmgd = \tfrac{1}{2}mv^2\,.$$

Z toho

$$d = \frac{1}{2}\frac{v^2}{fg}\,.$$

Pri riešení sme využili vzťah pre kinetickú energiu kvádra a zákon zachovania energie. Alternatívne by sme mohli príklad riešiť s využitím pohybových rovníc, aby sme ukázali, že oba prístupy vedú k rovnakému výsledku, vyriešme príklad teraz cestou Newtona.

Sila pôsobiaca na kváder spôsobuje jeho spomalenie veľkosti

$$a = F/m = fg\,.$$

Jedná sa teda o rovnomerne spomalený pohyb. Kváder pohybujúci sa rýchlosťou v zastaví za čas

$$t = v/a = \frac{v}{fg}\,,$$

Za tento čas prejde vzdialenosť

$$d = vt - \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{fg} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{fg} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{fg}\,.$$

Dostali sme opäť rovnaký výsledok.

(ii) Na kváder pôsobia tiažová sila a sila od podložky, ktoré sú v rovnováhe, ako sme už povedali skôr. Okrem toho však na kváder pôsobíme rukou silou 3 N zľava, aby sa kváder nehýbal, musela by naň pôsobiť nejaká sila presne veľkosti 3 N sprava, ktorá by silu našej ruky kompenzovala. Tou silou bude statické trenie, podmienka (4) je pre silu 3 N nepochybne splnené, takže môže mať veľkosť 3 N. Zapamätajme si: *Statické trenie má vždy takú veľkosť, aby zabránilo šúchaniu sa povrchov po sebe. Ak takúto veľkosť nemôže dosiahnuť a zároveň spĺňať* (4)*, povrchy sa po sebe začnú šúchať a pôsobí dynamické trenie podľa vzťahu* (2)*.*

(iii) Ako sme už skôr spočítali, prítlačná sila má veľkosť

$$F_{\mathrm{n}} = mg\cos\alpha\,.$$

Zložka gravitačnej sily pôsobiaca na kváder v smere rovnobežnom s podložkou je

$$F_{\mathrm{r}} = mg\sin\alpha\,.$$

Táto sila musí byť v rovnováhe so silou statického trenia, teda

$$F_{\mathrm{r}} = F_{\mathrm{t}}\,.$$

Zo vzťahu (4) však dostávame podmienku

$$F_{\mathrm{t}} \leq fF_{\mathrm{n}}\,,$$

Tá vedie k

$$mg\sin\alpha \leq fmg\cos\alpha$$

Teda

$$\mathrm{tg}\,\alpha \leq f\,.$$

Výsledok nám naznačuje ako veľmi presne merať koeficient trenia. Stačí položiť kváder na naklonenú rovinu a postupne zvyšovať jej sklon α, kým sa kváder nezačne šmýkať. Takto určený hraničný uhol α_{max} potom určuje koeficient trenia vzťahom

$$f = \mathrm{tg}\,\alpha_{\mathrm{max}}\,.$$

(iv) Na automobil pôsobí tiažová sila, tlaková sila od podložky na kolesá rovnakej veľkosti, odpor vzduchu a trecia sila vozovky pôsobiaca na kolesá. Na automobil nepôsobí žiadna sila motora poháňajúca ho vpred, ako si možno niektorí myslíte. Ktorá sila teda sunie auto vpred? Možno vás to prekvapí, ale je to *trenie*. Zamyslite sa, bude sa ľahšie hýbať auto na ľade s naolejovanými pneumatikami, alebo s pekne priľnavými gumami na kvalitnom asfalte? Koleso auta, ktoré sa hýbe zľava doprava sa točí v smere hodinových ručičiek. Keby sme toto auto postavili na cestu bez trenia, spodok kolesa by sa šúchal v smere sprava doľava po ceste. Tomuto hovoríme, že koleso prešmykuje. Ak však auto postavíme na cestu s dostatočným koeficientom trenia, sila trenia sa bude snažiť zabrániť tomu, aby sa spodok kolesa po ceste šúchal a preto bude pôsobiť opačným smerom, ako by sa chcel spodok kolesa hýbať, teda smerom zľava doprava, čo je smer pohybu auta. Táto sila teda spôsobí, že sa auto bude pohybovať zľava doprava. Ak bude koeficient trenia dostatočne veľký, spodok kolesa sa nebude po ceste šúchať vôbec, vtedy hovoríme, že koleso neprešmykuje.

(v) Ak auto položíme na naklonenú rovinu, bude sa chcieť hýbať dole posuvným pohybom. Keď je motor vypnutý, kolesá sa netočia sami od seba. Spodok kolesa sa teda bude chcieť pohybovať rovnako ako celé auto v smere dole kopcom. Preto bude trecia sila pôsobiť v presne opačnom smere ako sa hýbe auto a tentokrát to bude trecia sila, ktorá autu roztočí kolesá.

Otáčavá mechanika:

Platia pre ňu analogické vzťahy ako pre posuvnú mechaniku, stačí spraviť nasledovné substitúcie: Hmotnosť na moment zotrvačnosti

$$m \to I\,,$$

dráha na uhol

$$s \to \alpha\,,$$

rýchlosť na uhlovú rýchlosť

$$v \to \omega\,,$$

zrýchlenie na uhlové zrýchlenie

$$a \to \epsilon\,,$$

sila na moment sily

$$F \to N\,.$$

Analógiou Newtonovho vzťahu pre zrýchlenie je potom:

$$N = I\epsilon\,. \tag{5}$$

Vo fyzike sa s uhlami zvykne pracovať v jednotkách nazývaných radiány. Vtedy uhlu $360\,^\circ$ zodpovedá uhol $2\pi\,\mathrm{rad}$. Radiány sa považujú za tak základnú jednotku, že sa často vynecháva a hovorí sa rovno o uhle 2π. Výhodou používania radiánov je jednoduché počítanie dĺžky oblúku kružnice polomeru R prisluchajúcemu k uhlu α. Je to jednoducho αR. Premyslite si to. Obdobne potom pre kotúč otáčajúci sa na mieste dostaneme rýchlosť bodu na jeho obvode ako $v = \omega R$, zrýchlenie $a = \epsilon R$.

Príklady:

Aký musí byť koeficient trenia, aby valec pustený po naklonenej rovine so sklonom α neprešmykoval?

Riešenia:

Ak sa valec pohybuje bez prešmykovania, znamená to, že sa spodok valca po podložke nešúcha. To znamená, že pri jednej obrátke o plný uhol (2π) valec prejde vzdialenosť $2\pi R$. Z toho dostávame podmienku pre rýchlosť ťažiska $v = \omega R$, ktorá musí byť splnená aby valec neprešmykoval. Obdobne, ak valec zrýchľuje, musí platiť $a = \epsilon R$. Teda z (5) a (1)

$$RN/I = F/m\,.$$

Moment sily pôsobiaci na valec je

$$N = F_\mathrm{t} R$$

a celková sila pôsobiaca na valec je

$$mg\sin\alpha - F_\mathrm{t}\,.$$

Využitím, že I pre valec je $\frac{1}{2}mR^2$ dostávame rovnosť

$$2F_\mathrm{t}/m = (mg\sin\alpha - F_\mathrm{t})/m\,,$$

z nej vyjadrením F_t

$$F_\mathrm{t} = \tfrac{1}{3}mg\sin\alpha\,.$$

Z podmienky

$$F_{\mathrm{t}} \leq fmg\cos\alpha$$

dostávame

$$f \geq \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Teória k príkladu:

Po tomto rozsiahlom teoretickom úvode do problematiky otáčavej a posuvnej mechaniky môžeme pristúpiť k samotnému riešeniu úlohy. Celý čas budeme predpokladať, že podložka a valec sú dokonale tvrdé a valec je dokonale oválny. Budeme preto ignorovať vplyv valivého odporu. Tento však nie je možné za každých okolností odignorovať a od vás sa očakáva, že experimentálne preveríte rozsah platnosti týchto zjednodušení.

Všimnime si, že na valec pôsobí iba trecia sila od vyťahovaného papiera, označme ju F_t. Táto sila valec roztáča, zároveň urýchľuje jeho ťažisko. Pre zrýchlenie ťažiska dostávame z (1):

$$F/m = a\,,$$

pre uhlové zrýchlenie z (5)

$$FR/(\tfrac{1}{2}MR^2) = -\epsilon\,.$$

Všimnime si, že pomer zrýchlenia a uhlového zrýchlenia je konštantný a nezávisí na priebehu sily

$$a/\epsilon = -\tfrac{1}{2}\,, R$$

dôležité je tiež uvedomiť si, že uhlové zrýchlenie má opačný smer, ako pri valci valiacom sa bez prešmykovania po podložke.

Kedže valec na začiatku stál a $v = at$, $\omega = \epsilon t$, bude rovnaký vzťah platiť pre pomer rýchlosti a uhlovej rýchlosti:

$$v/\omega = -\tfrac{1}{2}R\,. \tag{6}$$

Opäť úplne nezávisle na spôsobe vyťahovania papiera!

Keď spod valca vytiahneme papier, bude chvíľu prešmykovať, toto prešmykovanie sa však vďaka treniu pomerne rýchlo zastaví. Nás by zaujímalo, ako sa po zastavaní prešmykovania valec bude hýbať. Pre pohyb bez prešmykovania máme rovnicu:

$$v = R\omega\,,$$

ktorá môže byť splnená súčasne s (6) jedine pre $v = 0$. To znamená, že po tom, ako valec prestane prešmykovať, zastane úplne a nebude sa ďalej kotúľať!

Vyťahujme teraz veľmi dlhý papier konštantnou rýchlosťou u. Bude valček na papieri večne prešmykovať? Nebude, stačí, ked sa spodný bod bude hýbať rovnako rýchlo ako papier. Tj.: $v - \omega R = u$, čiže $\frac{3}{2}v = u$.

Experimenty:

Ako merať trenie: Položíme kváder z materiálu, ktorého koeficient trenia chceme určiť na naklonenú rovinu a zvyšujeme sklon, kým sa nezačne šmýkať. Pre koeficient trenia potom platí: $f = tg\alpha$ Kde α je hraničný uhol, pri ktorom sa hranol začal šmýkať.

Ako merať polohu valca krásne, efektne a bez vysokorýchlostnej kamery: Zavrieme sa do tmavej miestnosti s fotoaparátom s dlhou expozičnou dobou.

Valček osvetlíme (napríklad naň pripevníme v tme svietiace lepky), začneme vyťahovať papier, stlačíme spúšť a fotoaparátom hýbeme v zmyslom smere nadol. Na výslednej fotke budeme mať krásny graf polohy valčeka od času (na yovej osi je čas, poznáme polohu fotoaparátu v nejakom čase). Ak nevieme pohybovať foťákom rovnomerne priamočiaro, môžeme si pomôcť tak, že na pozadí budeme mať „hodiny“ – notebook na ktorom bude pobehovať svetlá čiarka zľava doprava, pomocou nej potom z fotky vieme odčítať čas.

Môžete si tiež skúsiť zohnať stroboskop – rýchlo blikajúca vec, pekný obrázok fotky so stroboskopom nájdete napríklad na anglickej wikipédii.

Čo merať:

Overiť $v/\omega = -\frac{1}{2}R$, overiť že valec sa po vytiahnutí papiera zastaví a nebude sa kotúľať. Overiť, že valec na papieri prestane prešmykovať pre $v = \frac{2}{3}u$, kde u je rýchlosť vyťahovania papiera. Preskúmať vplyv valivého odporu (ktorý sme vo výpočtoch zanedbávali) na presnosť zhody experimentu a teórie.